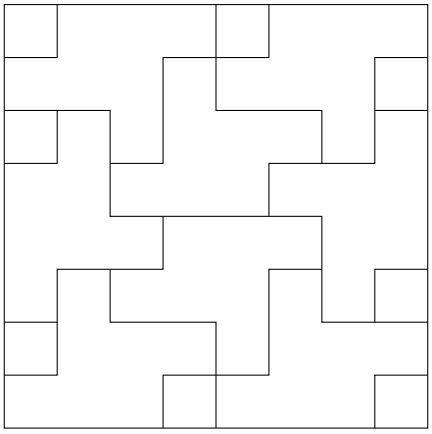
ますらぼからの挑戦状 解答編 (2026 年駒場祭)

1

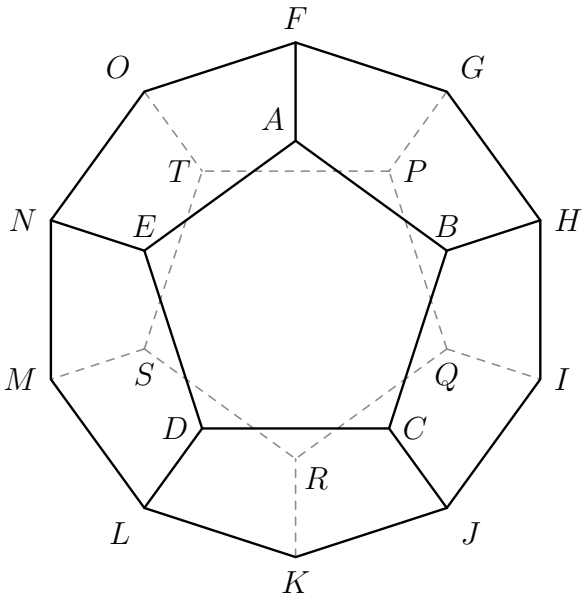


2 3 桁と 3 桁の和が 4 桁になっていることから $E = 1$ であることが分かり, また O は $5, 6, 7, 8, 9$ のいずれかである. 1 の位で繰り上がりが発生する場合, $D = 9, N = 0$ となるが, このとき 10 の位の計算が合わないので, 1 の位で繰り上がりが発生しない. また, $D + N \geqq 0 + 2 = 2 > 1 = E$ より, 10 の位では繰り上がりが発生する.

100 の位では繰り上がりが発生するので, 各位を計算すると $D + 1 = N, D + N = 11, O + O + 1 = 10 + V$ を得る. 第一式と第二式より $D = 5, N = 6$. よって O としてあり得るものは $7, 8, 9$ のいずれかである. $O = 7$ のとき $V = 5$ となり D と被る. $O = 8$ のときは $V = 7$ となり, 適する. $O = 9$ のとき $V = 9$ となり O と被る. 以上より解答は $\boxed{855 + 861 = 1716}$ $(O, D, N, E, V) = (8, 5, 6, 1, 7)$ である.

3 与えられた展開図を組み立てると, 立方体 $ABCD - EFGH$ について, 辺 AB, BF, FG, GH, HD, DA のそれぞれの中点を通るような平面で切断した立体を 8 個組み合わせた立体になる. 各立方体の 1 辺の長さは $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \times 2 = \sqrt{2}$ であるので, 求めるべき体積は $(2\sqrt{2})^3 \times \dfrac{1}{2} = \boxed{8\sqrt{2}}$ である.

4 図のように頂点をおき, 正十二面体 $ABCDE\text{-}FGHIJKLMNO\text{-}PQRST$ を考える. 重複なく頂点を辿り出発点に戻るような経路を閉路と呼び, すべての頂点を一度だけ通る閉路をハミルトン閉路と呼ぶ.



問題における経路において, A から B まで経路を辿ったあとに B から A に進むことを考えることでハミルトン閉路が得られる. 逆に辺 AB を含むハミルトン経路から AB を取り除くと条件を満たす経路が得られる. 以上より, 求めるものは与えられた辺を含むハミルトン閉路の総数に等しい. 正十二面体におけるハミルトン閉路の個数を N とおくと, 与えられた辺を含むハミルトン閉路の総数 M は $\frac{2}{3}N$ に等しいことを示す. 正十二面体の頂点の数は 20 であるからハミルトン閉路に含まれる辺の本数は 20 である. また, 正十二面体の辺の数は 30 である. よって, M をすべての辺において足し合わせると, これは同じハミルトン閉路を 20 回重複して数えているから

$$N = \frac{1}{20} \cdot 30M \qquad \therefore M = \frac{2}{3}N$$

である.

次に N を求める. ハミルトン閉路 γ をひとつ固定すると, 各面は γ に含まれる辺を 3 本または 4 本持つことがわかる. 実際, そのような辺が 2 本以下だと γ が通らない頂点が存在し, 5 本だと γ が真に小さい閉路を含んでしまうが, これは γ がハミルトン閉路であることに反する. γ に含まれる辺が 3 本である面の個数を x, 4 本である面の個数を y とおくと, 面の数が 12 であることから $x + y = 12$ で, γ に含まれる辺の本数が 20 本であることから $3x + 4y = 40$ である (どの辺も 2 つの面に含まれていることに注意). よって $x = 8, y = 4$ である. 特に $y > 0$ より γ に含まれる辺が 4 本である面が存在し, それが面 $ABCDE$ である場合を考える. さらに γ が辺 CD を含まない場合を考える. このとき γ は辺 CJ, DL を含む. 面 $CDLKJ$ は γ に含まれる辺を 3 本以上持つので γ は辺 KJ, KL の少なくとも一方を含む. いずれも含むとすると γ が真に小さい閉路 $ABCJKLDEA$ を含んでしまうのでそのようなことはない. よって γ は辺 KJ, KL の一方のみを含む. 辺 KJ を含む場合も考える. このとき,

- γ が辺 XY を含まないならば, γ は X または Y を端点に持つ辺をすべて含むこと
- γ が辺 XY, XZ $(Y \neq Z)$ を含むならば, γ は X を端点に持つもう一つの辺を含まないこと

に注意して考えると, γ は閉路 $ABCJKRSTPQIHGFONMLDEA$ となるしかないことがわかる. 辺 KJ を含む場合も, 面 $AFRK$ における対称性からありうる γ は 1 通りである. 以上より, ある面の辺を 4 本含むような γ の個数は, 含まない辺の選び方が 5 通り, そのときありうる γ が 2 通りであるから 10 通りである. こ

れを 12 個すべての面について足し合わせると, 同じハミルトン閉路を $y=4$ 回重複して数えているから,

$$N=\frac{1}{4}\cdot 10\cdot 12=30.$$

よって, 求める答えは

$$\frac{2}{3}N=\boxed{20}$$

である.

$\boxed{5}$ シールの中心から円柱の軸に下ろした垂線の足を原点とし, 原点からシールの中心に向かって x 軸を, 円柱の軸の方向に z 軸を, どちらにも直交する方向に y 軸をとる. 貼り付けたシール上の任意の 2 点を結ぶ線分の通過する領域を V とおく. $0\le t\le 1$ を満たす t を固定し, 平面 $x=t$ と V の共通部分を V_t とおく.

まず,

$$V_t=\left\{(t,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,|y|\le\sqrt{1-t^2},\ |z|\le\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\big(\arccos t\big)^2}\right\}$$

であることを示す.

$\subset$ について示す. 問題の条件から, 貼り付けたシール上の点全体 S は

$$S=\left\{(\cos\theta,\sin\theta,z)\,\middle|\,\theta^2+z^2\le\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}$$

と表される. $|\theta|\le\frac{\pi}{2}$ なので, S の点の x 座標は 0 以上 1 以下であり, V についても同様である. ここで関数 $\varphi:[0,1]\to[0,\pi],\varphi(s)=(\arccos s)^2$ を考える. $0<s<1$ において

$$\varphi''(s)=\frac{2\left(\sqrt{1-s^2}-s\arccos s\right)}{(1-s^2)^{3/2}}\ge 0$$

である. 実際, $u=\arccos s\in(0,\frac{\pi}{2})$ とおけば, 分子の括弧内は

$$\sin u-u\cos u=\cos u(\tan u-u)\ge 0$$

となる. よって φ は $[0,1]$ 上の凸関数である. いま任意の $P=(t,y,z)\in V_t$ をとると, これはシール上の 2 点 $P_i=(x_i,y_i,z_i)\in S\ (i=1,2)$ と $0\le\lambda\le 1$ を用いて $P=(1-\lambda)P_1+\lambda P_2$ と書ける. 各 $P_i\,(i=1,2)$ について $x_i^2+y_i^2=1$, $\varphi(x_i)+z_i^2\le\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ が成り立つ. 単位円板の凸性から $t^2+y^2\le 1$ であり, また φ および $z\mapsto z^2$ の凸性から

$$\begin{aligned}\varphi(t)+z^2&\le(1-\lambda)\varphi(x_1)+\lambda\varphi(x_2)+(1-\lambda)z_1^2+\lambda z_2^2\\&=(1-\lambda)\big(\varphi(x_1)+z_1^2\big)+\lambda\big(\varphi(x_2)+z_2^2\big)\\&\le\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

よって,

$$|y|\le\sqrt{1-t^2},\qquad |z|\le\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\big(\arccos t\big)^2}$$

であり, $\subset$ の包含が従う.

$\supset$ については,

$$S\cap V_t=\left\{(t,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,|y|=\sqrt{1-t^2},\ |z|\le\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\big(\arccos t\big)^2}\right\}$$

上の任意の 2 点を結ぶ線分の通過する領域が

$$\left\{(t,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; |y|\le\sqrt{1-t^2},\ |z|\le\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(\arccos t\right)^2}\right\}$$

に一致することからわかる. 以上より V_t が先述した形で表せることがわかった.

次に, 求める体積を計算する. 回転軸は x 軸なので, V_t を x 軸のまわりに 1 回転させると, 半径

$$R(t)=\sqrt{1-t^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(\arccos t\right)^2}$$

の円板となる. したがって, 求める体積を W とすると,

$$\begin{aligned}W&=\pi\int_0^1 R(t)^2\,dt\\&=\pi\int_0^1\left(1-t^2+\frac{\pi^2}{4}-\left(\arccos t\right)^2\right)dt\\&=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi^2}{4}-\int_0^1\left(\arccos t\right)^2dt\right).\end{aligned}$$

ここで $t=\cos u$ と置換し, 部分積分すると,

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\arccos t\right)^2dt&=\int_0^{\pi/2}u^2\sin u\,du\\&=\left[-u^2\cos u+2u\sin u+2\cos u\right]_0^{\pi/2}\\&=\pi-2.\end{aligned}$$

以上より, 求める体積は

$$W=\boxed{\frac{1}{4}\pi^3-\pi^2+\frac{8}{3}\pi}$$

である.

6 原点を O とする。$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=1$ である。

$\angle A$ が鈍角になる条件

まず、頂点 A における角が鈍角となる条件を調べる。辺 BC の中点を M とし、$r=\left|\overrightarrow{OM}\right|$ とすると、

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2},$$

であり、

$$r^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|^2=\frac{1+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{2}.$$

よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\\&=1+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\\&=2r^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}.\end{aligned}$$

$r > 0$ の場合、O から M に向かう単位ベクトルを $\boldsymbol{n} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$ と定めると、

$$\begin{aligned} \angle BAC > \frac{\pi}{2} &\iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0 \\ &\iff \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} > r^2 \\ &\iff \overrightarrow{OA} \cdot \boldsymbol{n} > r. \end{aligned}$$

なお、$r = 0$ となるのは B, C が互いに対蹠点の場合であり、その確率は 0 なので、ここでは考えなくてよい。

B, C を固定すると、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \boldsymbol{n} > r$$

は、点 A が平面

$$\overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{n} = r$$

よりも $\boldsymbol{n}$ 方向にあることを表す。この平面は M を通り、直線 OM に垂直である。

したがって、 $\angle A$ が鈍角になる領域は、高さ $1 - r$ の球冠である。(図 1 参照。)

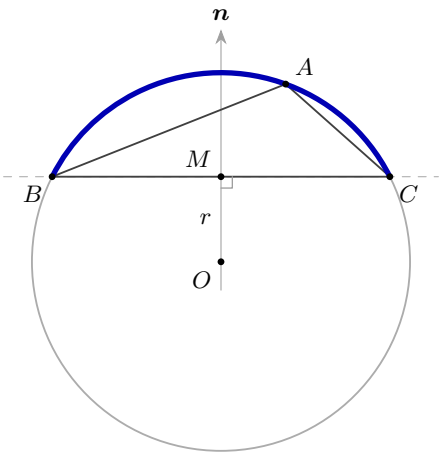


図 1　平面 OBC による断面。青い円弧を軸 OM のまわりに回転した領域に A があるとき、$\angle A$ が鈍角になる。

B, C を固定したとき $\angle A$ が鈍角になる確率

単位球面上で、高さ $1 - r$ の球冠の面積は $2\pi(1 - r)$、球面全体の面積は 4π である。したがって、B, C を固定したとき $\angle A$ が鈍角になる確率は

$$\frac{2\pi(1 - r)}{4\pi} = \frac{1 - r}{2}.$$

r がある微小区間に含まれる確率

まず、点 B を固定し、r が小さな区間

$$t \leq r < t + \Delta t$$

に入る確率を求める。ただし、$0 \leq t < t + \Delta t \leq 1$ とする。

回転対称性より、$B(0,0,1)$ としてよい。このとき、点 C の z 座標は

$$z = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$$

である。前節で求めた関係から、

$$r^2 = \frac{1+z}{2} \;\Leftrightarrow\; z = 2r^2 - 1$$

である。

したがって、$t \le r < t + \Delta t$ となるのは、点 C の z 座標が

$$2t^2 - 1 \le z < 2(t+\Delta t)^2 - 1$$

の範囲にあるときである。この帯状の部分の高さは

$$\begin{aligned}\Delta z &= \left\{2(t+\Delta t)^2 - 1\right\} - \left(2t^2 - 1\right) \\ &= 4t\,\Delta t + 2(\Delta t)^2\end{aligned}$$

となる。

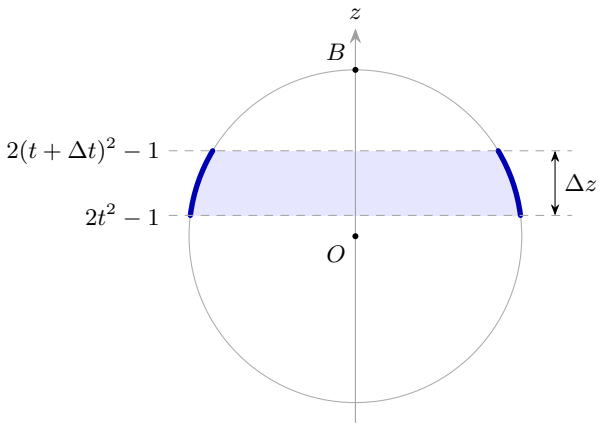


図 2　$t \le r < t + \Delta t$ に対応する球面上の帯。青い円弧を軸 OB のまわりに回転すると、高さ Δz の帯状の球面部分が得られる。

単位球面上では、高さ Δz の帯の面積は $2\pi\,\Delta z$ である。球面全体の面積は 4π なので、

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(t \le r < t + \Delta t) &= \frac{2\pi\,\Delta z}{4\pi} \\ &= 2t\,\Delta t + (\Delta t)^2.\end{aligned}$$

したがって、Δt が十分小さいとき、

$$\mathbb{P}(t \le r < t + \Delta t) \approx 2t\,\Delta t$$

となる。

r を動かして積分する

B, C を固定したとき、頂点 A の角が鈍角になる確率は

$$\frac{1-r}{2}$$

であった。$t \leq r < t + \Delta t$ という小さな区間では、これはほぼ

$$\frac{1-t}{2}$$

とみなせる。よって、この区間に入り、かつ頂点 A の角が鈍角になる確率は、およそ

$$\frac{1-t}{2} \times 2t\,\Delta t$$

である。

これを $t=0$ から $t=1$ までのすべての小さな区間について足し合わせ、区間の幅 Δt を限りなく小さくすると、

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\angle A > \frac{\pi}{2}\right) &= \int_0^1 \frac{1-t}{2}\,2t\,dt \\
&= \int_0^1 (t - t^2)\,dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

鋭角三角形になる確率

三角形には鈍角は高々 1 つしか存在しないので、各頂点が鈍角となる 3 つの事象は互いに排反である。3 点の選び方は対称なので、

$$\mathbb{P}(\text{鈍角三角形}) = 3\mathbb{P}\left(\angle A > \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

$0 < r < 1$ の場合、頂点 A の角が直角となる条件は

$$\overrightarrow{OA} \cdot \boldsymbol{n} = r$$

である。これを満たす点 A は球面上の 1 つの円に含まれ、その球面上の面積は 0 である。$r=0$ または $r=1$ となる確率も 0 なので、直角三角形となる確率は 0 である。また、点の一致などにより三角形が退化する確率も 0 である。

以上から、

$$\mathbb{P}(\text{鋭角三角形}) = 1 - \mathbb{P}(\text{鈍角三角形}) = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

7 $\mathbb{F}_p$ 上で考える. 相異なる a, b が $a^2+3=b$, $b^2+3=a$ を満たすとする. 差を取ると $(a-b)(a+b+1)=0$ なので $a+b=-1$ であり, $ab=a(-1-a)=4$ となる. また $(a-b)^2=-15$ より $p \neq 3, 5$ である.

a, b が非零平方剰余なら $a=u^2$, $b=v^2$ と書ける. $(uv)^2=4$ なので, 符号を選んで $uv=2$ としてよい. すると $(u+v)^2=3$, $(u-v)^2=-5$ となる. よって, 3 と -5 はともに非零平方剰余である.

逆に $r^2=3$, $s^2=-5$ を満たす非零元 r, s が存在すれば, $a=((r+s)/2)^2$, $b=((r-s)/2)^2$ と置く. このとき $a+b=-1$, $ab=4$, $a-b=rs \neq 0$ であり, a, b は非零平方剰余である. また $a^2+3=-a-1=b$, $b^2+3=-b-1=a$ となるので, 条件を満たす二周期軌道をなす.

したがって必要十分条件は, ルジャンドル記号を用いて $\left(\frac{3}{p}\right)=\left(\frac{-5}{p}\right)=1$ と書ける. 平方剰余の相互法則と補充法則より, これは $p\equiv 1,11 \pmod{12}$ かつ $p\equiv 1,3,7,9 \pmod{20}$ と同値である. よって求める素数は $\boxed{p\equiv 1,23,47,49 \pmod{60}}$ を満たす素数である.

8 $k=1,\dots,n$ について $|\sigma(k)-k|\leq 1$ を満たす偶置換, 奇置換の個数をそれぞれ a_n, b_n とおき, $c_n=a_n+b_n, d_n=a_n-b_n$ とおく. c_n, d_n の漸化式を立てる. $\sigma(n+2)$ は $n+1$ または $n+2$ に等しく, $\sigma(n+2)=n+1$ のときは $\sigma(n+1)=n+2$ となってこれが置換の偶奇に寄与することに注意すると

$$\begin{cases} c_{n+2}=c_{n+1}+c_n,\ c_1=1, c_2=2 \\ d_{n+2}=d_{n+1}-d_n, d_1=1, d_2=0 \end{cases}$$

が得られる. c_n は $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, F_1=F_2=1$ で定まるフィボナッチ数列 F_n を用いて $c_n=F_{n+1}$ と書ける. d_n は周期 6 で $1,0,-1,-1,0,1$ を繰り返す数列である. 以上より,

$$a_n=\frac{c_n+d_n}{2}=\boxed{\begin{cases} \dfrac{F_{n+1}+1}{2} & \big(n\equiv 0,1 \pmod 6\big), \\ \dfrac{F_{n+1}}{2} & \big(n\equiv 2,5 \pmod 6\big), \\ \dfrac{F_{n+1}-1}{2} & \big(n\equiv 3,4 \pmod 6\big). \end{cases}}$$

である. $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ を用いて

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}+\left(\cos\frac{n\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

と表してもよい.

9 求めるべき濃度を λ とおく. まず, 辺の数は $\kappa\times\kappa=\kappa$ であるので, 彩色の方法は高々 2^κ 通りである.

以下彩色の方法が少なくとも 2^κ 通りあることを示す. ω_κ を濃度 κ の最小の順序数とする. グラフの 2 つのソートを $X=\omega_\kappa\cup\{*\}$, $Y=\omega_\kappa$ として一般性を失わない. Y の濃度 κ の各部分集合 A に対して, 以下の彩色を考える.

- $*$ と A の元を結ぶ辺は赤で塗る.
- $*$ と $Y\backslash A$ の元を結ぶ辺は青で塗る.
- 順序数 $\alpha\in\omega_\kappa\subset X$ および $\beta\in Y$ について, $\alpha>\beta$ であるときかつそのときに限り α と β を結ぶ辺を赤で塗る.

このとき, この各彩色は互いに非同型である. 実際, 同型で移り合う彩色の方法があるとする. このとき, 各 $\alpha\in\omega_\kappa$ に対して α 未満の順序数は κ 個未満であるため, $\{*\}$ は同型写像で不変である. また, 各順序数は非順序同型であることから各ソートの ω_κ の元も同型写像で不変である. したがって, 両彩色について A が一致することがわかる.

いま, このような, ω_κ の濃度 κ の部分集合の個数は 2^κ である. 実際, ω_κ を適当に二つの濃度 κ の集合 S,T に分けると, $S\cup B(B\subset T)$ はいずれも条件をみたすのでよい.

これより, 彩色の方法は少なくとも 2^κ 通りあるため, $\boxed{2^\kappa}$ が求めるべき値である.

10 1013 は奇素数であることから, 2026 を $2p$ (p は奇素数) におきかえて同じ問題を考えれば十分である. $\sigma \in S_{2p}$ による X への作用を $\sigma(-)$ で表し, 群 G の単位元を 1_G で表す. 問題の条件を満たす S_{2p} の部分群を G とおく.

まず, $|G| = 2p$ を示す. $X = \{1, 2, \ldots, 2p\}$ とおき, 写像 $\theta : G \to X,\ g \mapsto g(1)$ を考える. 作用の推移性から θ は全射である. また, $g(1) = h(1)$ のとき $(h^{-1}g)(1) = 1$ であり, 作用の自由性から $h^{-1}g = 1_G$, すなわち $g = h$ となって θ の単射性が従う. したがって θ は全単射であり, $|G| = |X| = 2p$ を得る.

次に, 位数 $2p$ の群 H を固定したときに, 問題の条件を満たす G であって H と同型なものの個数は

$$\frac{(2p-1)!}{|\mathrm{Aut}(H)|}$$

で与えられることを示す.

$$A := \left\{ f : H \to X \mid f \text{ は全単射}, f(1_H) = 1 \right\}$$

$$B := \left\{ G \text{ は } S_{2p} \text{の部分群} \mid G \text{ は問題の条件を満たし}, G \cong H \right\}$$

と定める. 全射 $\Phi : A \to B$ があり, 任意の $G \in B$ について $|\Phi^{-1}(G)| = |\mathrm{Aut}(H)|$ であることが分かれば主張が従うので, そのことを示す.

まず Φ を構成する. $f \in A$ に対して, 以下の図式を可換にするような唯一の射を $\rho_f(h)$ と定めて S_{2p} の元と同一視することで群準同型 $\rho_f : H \to S_{2p}$ が定まる (これは, f を通じて左乗法による H の H への作用を X 上にうつすような写像である).

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{h\cdot(-)} & H \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow[\rho_f(h)(-)]{} & X \end{array}$$

これは単射であることがわかるので $\rho_f(H)$ は H と同型な S_{2p} の部分群である. 以下 ρ_f の終域を ρ_f の像に制限した写像を $\overline{\rho_f}$ と書くことにする (これは群同型である). また, 左乗法による H の H への作用が自由かつ推移的であることから, $\rho_f(H)$ は X に自由かつ推移的に作用することがわかる. 以上より, $f \mapsto \rho_f(H)$ によって写像 $\Phi : A \to B$ を定めることができる.

Φ が全射であることを示す. $G \in B$ をとり, 群同型 $\phi : H \to G$ を 1 つとる. このとき $f_\phi(1_H) = 1$ であり, かつ次の図式を可換にするような $f_\phi : H \to X$ が一意に存在する. 実際, 図式の左上の H の単位元の行き先を考えることで一意性が, $h \mapsto (\phi(h))(1)$ は図式を可換にすることから存在性がそれぞれいえる. G の作用が自由かつ推移的であることから f_ϕ は全単射であり, $f_\phi \in A$ である. また, $\Phi(f_\phi) = G$ である. これは図式を可換にする ρ_{f_ϕ} の一意性より $\overline{\rho_{f_\phi}} = \phi$ となることから従う. よって Φ は全射である.

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{h\cdot(-)} & H \\ {\scriptstyle f_\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_\phi} \\ X & \xrightarrow[\phi(h)(-)]{} & X \end{array}$$

任意の $G \in B$ について $|\Phi^{-1}(G)| = |\mathrm{Aut}(H)|$ を示す. $C := \left\{ \phi : H \to G \mid \phi\text{は群同型} \right\}$ とおくと, $f \mapsto \overline{\rho_f}$ は $\Phi^{-1}(G)$ から C への, $\phi \mapsto f_\phi$ は C から $\Phi^{-1}(G)$ への写像をそれぞれ定め, また互いに逆である. したがって

$$|\Phi^{-1}(G)| = |C| = |\mathrm{Aut}(H)|$$

である. 以上より, H を固定したときに, 問題の条件を満たす G であって H と同型なものの個数が

$$\frac{(2p-1)!}{|\mathrm{Aut}(H)|}$$

で与えられることが示された.

位数 $2p$ の群は巡回群 C_{2p} または二面体群 D_p に同型であり, この 2 つは同型でないことから, 求めるものは

$$\frac{(2p-1)!}{|\mathrm{Aut}(C_{2p})|}+\frac{(2p-1)!}{|\mathrm{Aut}(D_p)|}$$

に等しい. 以下 $|\mathrm{Aut}(C_{2p})|, |\mathrm{Aut}(D_p)|$ を求める. まず

$$\mathrm{Aut}(C_{2p})\cong(\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z})^\times\cong(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\cong\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$$

より $|\mathrm{Aut}(C_{2p})|=p-1$. さらに $|\mathrm{Aut}(D_p)|$ を求める.

$$D_p=\langle r,s\mid r^p=1_{D_p},s^2=1_{D_p},srs=r^{-1}\rangle=\left\{r^is^j\mid 0\le i\le p-1,0\le j\le 1\right\}$$

である. $x\in D_p$ の位数を $\mathrm{ord}(x)$ で表すことにすると, この表示から

$$\mathrm{ord}(1)=1,\ \mathrm{ord}(r^i)=p\ (1\le i\le p-1),\ \mathrm{ord}(r^is)=2\ (0\le i\le p-1)$$

がわかる. $\varphi\in\mathrm{Aut}(D_p)$ をとると,

$$\mathrm{ord}(\varphi(r))=\mathrm{ord}(r)=p,\ \mathrm{ord}(\varphi(s))=\mathrm{ord}(s)=2$$

となる必要があるので, 上述の D_p の元の位数についての結果から

$$(\varphi(r),\varphi(s))=(r^{i_1},r^{i_2}s)\quad(1\le i_1\le p-1,0\le i_2\le p-1)$$

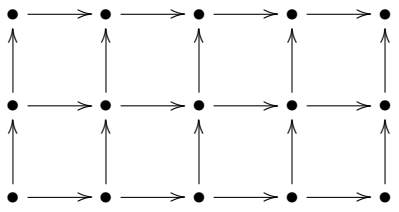
となる必要がある. 逆にこの組み合わせのいずれによっても互いに異なる $\mathrm{Aut}(D_p)$ の元がそれぞれ一意に定まることが確かめられるので, $|\mathrm{Aut}(D_p)|=p(p-1)$. 実際, $(r',s')=(r^{i_1},r^{i_2}s)$ とおけば $r'^p=1_{D_p},s'^2=1_{D_p},s'r's'=r'^{-1}$ が成り立つので群準同型 $\varphi:D_p\to D_p$ が定まり, r' が $\langle r\rangle$ を生成することから r および $s=r^{-i_2}s'$ が φ の像に入ることがわかるので φ は全射である. 有限集合上の全射写像は全単射なので, $\varphi\in\mathrm{Aut}(D_p)$ である.

以上より, 求めるものは

$$\frac{(2p-1)!}{|\mathrm{Aut}(C_{2p})|}+\frac{(2p-1)!}{|\mathrm{Aut}(D_p)|}=\boxed{\frac{(p+1)(2p-1)!}{p(p-1)}}$$

に等しい. $p=1013$ とおけばこの問題の答えが得られる.

11 途中まで $m=3, n=5$ として解説する. 線型写像の行き先を調べると以下のような図が書ける.



V_k を $k=j-i+3$ をみたす (i,j) についての (i,j) 成分からなる $M_{3,5}(\mathbb{C})$ の部分空間とすると，$F(V_k)\subset V_{k+1}$ が成り立ち，

$$\mathbb{C}\xrightarrow{F}\mathbb{C}^2\xrightarrow{F}\mathbb{C}^3\xrightarrow[\simeq]{F}\mathbb{C}^3\xrightarrow[\simeq]{F}\mathbb{C}^3\xrightarrow{F}\mathbb{C}^2\xrightarrow{F}\mathbb{C}\xrightarrow{F}0$$

というように F を表せる．ここで，$F^4|_{V_2}\colon V_2\to V_6$ および $F^6|_{V_1}\colon V_1\to V_7$ が同型になると仮定する．

$$\begin{array}{ccccc} V_3 & \xrightarrow[\simeq]{F} & V_4 & \xrightarrow[\simeq]{F} & V_5 \\ {\scriptstyle F}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ V_2 & & \xrightarrow[\simeq]{F^4} & & V_6 \\ {\scriptstyle F}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ V_1 & & \xrightarrow[\simeq]{F^6} & & V_7 \end{array}$$

V_1 の基底を e_1 とし，$V_6\cap \mathrm{K}er(F)$ の元 v をとり $e_2=(F^4|_{V_2})^{-1}(v)$ とし，$V_5\cap \mathrm{K}er(F)$ の元 w をとり $e_3=(F^2|_{V_3})^{-1}(w)$ と定める．ここで，$e_1,Fe_1,\dots,F^6e_1,\ e_2,Fe_2,\dots,F^4e_2,\ e_3,Fe_3,F^2e_3$ が $M_{3,5}(\mathbb{C})$ の基底であることが示せれば Jordan 標準形が $J(0;7)\oplus J(0;5)\oplus J(0;3)$ であることがわかる．これを言うには $V_1,V_2,\dots$ が生成されることを順に確かめればよい．

$m,\ n$ を一般の正の整数に戻す．$m\le n$ と仮定してよい．$(m,n)=(3,5)$ のときと同じように $M_{m,n}=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_{m+n-1}$ と分解する．$F^{m+n-2k}|_{V_k}\colon V_k\to V_{m+n-k}$ が同型であることがわかれば F の Jordan 標準形が $\boxed{J(0;n+m-1)\oplus J(0;n+m-3)\oplus\cdots\oplus J(0;n-m+1)}$ となることが示せる．以下，この同型を示す．

$F^{m+n-2k}|_{V_k}\colon V_k\to V_{m+n-k}$ を適切に基底をとって表示すると，表現行列は (i,j) 成分が $\binom{m+n-2k}{m-k+i-j}$ となる．したがって，この行列の行列式が 0 でないことを示すことに帰着される．以下，これを示す．

補題 1. $x_1,\dots,x_n;a_1,\dots,a_{n-1};b_1,\dots,b_{n-1}\in\mathbb{C}$ に対して，(i,j) 成分が $(x_i+a_1)\cdots(x_i+a_{j-1})(x_i+b_j)\cdots(x_i+b_{n-1})$ であるような行列の行列式は

$$\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\prod_{1\le i\le j\le n-1}(b_j-a_i)$$

である．

証明. 多項式の次数と零点を考えると，補題は定数倍を除いて成り立つ．両辺の $\prod_{j=i}^{n-1}{b_j}^j$ の係数を比較すると Vandermonde の行列式になっており，補題の成立がわかる． □

補題 2. $a,\ b$ を非負整数，k を正の整数とすると，

$$\det\binom{a+b}{a+j-i}_{i,j\in\{1,\dots,k\}}=\prod_{i=1}^{k}\frac{(a+b)!}{(a+k-i)!(b+i-1)!}\prod_{1\le i<j\le k}(j-i)(a+b+j-i)$$

が成り立つ．特に，$a,\ b$ が非負整数ならこの値は 0 ではない．

証明. i を固定すると

$$\begin{aligned}\binom{a+b}{a+j-i}_{i,j}&=\frac{(a+b)!}{(a+k-i)!(b+i-1)!}(b+i-1)\cdots(b+i-j+1)\cdot(a-i+j+1)\cdots(a-i+k)\\&=(-1)^{k-j}\frac{(a+b)!}{(a+k-i)!(b+i-1)!}(b+i-1)\cdots(b+i-j+1)\cdot(i-a-j-1)\cdots(i-a-k)\end{aligned}$$

と書けることに注意する．補題 1 において $x_i = i$, $a_j = b - j$, $b_j = -a - j - 1$ とすることにより，

$$\det \binom{a+b}{a+j-i}_{i,j} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \prod_{i=1}^{k} \frac{(a+b)!}{(a+k-i)!(b+i-1)!} \prod_{1 \le i < j \le k} (j-i) \prod_{1 \le i \le j \le k-1} (-(a+j+1) - (b-i))$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \frac{(a+b)!}{(a+k-i)!(b+i-1)!} \prod_{1 \le i < j \le k} (j-i)(a+b+j-i)$$

となる． □

$m - k$, $n - k$ はいずれも非負なので補題 2 により $F^{m+n-2k}|_{V_k} : V_k \to V_{m+n-k}$ は同型である